

КУЛОНОВСКАЯ ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

Куперин Ю. А., Макаров К. А., Мельников Ю. Б.

Методами теории расширений с выходом из основного гильбертова пространства построена модель взаимодействия внешнего (кулоновского) и внутреннего (кваркового) каналов в задаче двух тел. Изучено взаимное влияние спектров соответствующих канальных гамильтонианов, приводящее, в частности, к перестройке спектров адронных атомов. Получено явное представление для S -матрицы и изучены ее особенности на энергетической поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

Методами теории расширений [1–3] в настоящей работе исследуется взаимное влияние спектров гамильтонианов внешнего (кулоновского) и внутреннего (кваркового, остовного и т. п.) каналов в системе двух заряженных частиц, обладающих внутренней структурой. Примерами таких систем могут служить, скажем, легкие адронные атомы типа K^-p , $p\bar{p}$ или ридберговский атом с одним удаленным электроном и сложным остовом. В том и другом случаях влияние внутренней структуры частиц проявляется в радикальной перестройке взаимодействия на малых расстояниях, — размораживании внутренних степеней свободы, порождающих в нашей модели дополнительный короткодействующий энергозависящий потенциал во внешнем канале. С другой стороны, простота динамики больших расстояний — движение в чисто кулоновском поле — позволяет построить точно решаемую модель, S -матрица которой, наследуя спектральные свойства внутреннего гамильтониана, обладает значительно более богатой аналитической структурой, чем соответствующая кулоновская матрица рассеяния. Простота, но не спектральная тривиальность кулоновского взаимодействия во внешнем канале позволяет в отличие от [1–3], где внешний гамильтониан имел лишь ветвь непрерывного спектра, проследить математически строго, т. е. на операторном уровне, за всеми основными явлениями взаимодействия спектров внутреннего и внешнего каналов — перестройкой атомного спектра адронных атомов [4], появлением ширин у собственных чисел внутреннего гамильтониана и т. д. Основным инструментом исследования этих явлений служит достаточно аналитически содержательная S -матрица рассматриваемой модели.

Сформулируем вкратце основные идеи метода [1]. Для описания внутренних степеней свободы вводятся дополнительное абстрактное гильбертово пространство \mathcal{H}^{in} и действующий в нем произвольный самосопряженный оператор H^{in} . Внешние свойства системы, связанные с кулоновским взаимодействием, определяются оператором Шредингера $H^{\text{ex}} = -\Delta + ar^{-1}$,

действующим во внешнем канале $\mathcal{H}^{\text{ex}} = L^2(\mathbb{R}^3)$. Для корректного описания взаимодействия каналов \mathcal{H}^{ex} и \mathcal{H}^{in} предлагается следующая схема. Самосопряженные операторы H^{ex} и H^{in} сужают до симметричных операторов H_0^{ex} и H_0^{in} , а затем строят всевозможные самосопряженные расширения оператора $H_0 = H_0^{\text{ex}} \oplus H_0^{\text{in}}$ в пространстве $\mathcal{H}^{\text{ex}} \oplus \mathcal{H}^{\text{in}}$. В результате внутренний и внешний каналы оказываются связанными между собой. Последующее исключение переменных внутреннего канала приводит во внешнем канале к зависящему от энергии граничному условию или, что эквивалентно, к сингулярному энергозависящему потенциалу, несущему информацию о спектре внутреннего канала.

В настоящей работе мы считаем частицы точечными, что приводит к нетривиальному рассеянию лишь в s -канале. Для рассматриваемого нами круга задач это приближение заведомо оправдано в области низких энергий. Однако обобщение на случай неточных объектов или включение высших парциальных волн не связано в нашей модели с серьезными трудностями (см. [3]). Здесь же уместно отметить, что некоторые спектральные явления, описанные ранее [4, 5] в модели составных кварковых мешков с отличным от нуля радиусом, воспроизводятся и в нашей схеме для точечных частиц. Это свидетельствует, по-видимому, о том, что правильное включение взаимодействия между каналами является решающим и не связано фактически с выбором величины радиуса составных кварковых мешков.

План изложения таков. Сначала в разделах 1, 2 мы подготавливаем внешний и внутренний операторы к совместному расширению, описанному в разделе 2, и обсуждаем структуру возникающего в результате расширения взаимодействия каналов. Затем в разделе 3 мы изучаем взаимодействие дискретных спектров внешнего и внутреннего каналов и, в частности, рассматриваем явление перестройки атомного спектра адронных атомов. Наконец, в разделе 4 исследуется взаимодействие непрерывного внешнего и дискретного внутреннего спектров и описывается механизм образования резонансов внешнего канала, порожденных внутренней структурой сталкивающихся частиц.

1. ВНЕШНИЙ КАНАЛ

Динамика внешнего (кулоновского) канала $\mathcal{H}^{\text{ex}} = L^2(\mathbb{R}^3)$ без учета внутренней структуры частиц задается самосопряженным оператором Шредингера H^{ex}

$$(1) \quad H^{\text{ex}} = -\Delta + a|x|^{-1}, \quad a < 0,$$

где a — приведенный заряд системы. В нашем подходе включение внутренних (кварковых) степеней свободы достигается сужением оператора H^{ex} до симметричного оператора H_0^{ex} , обладающего нетривиальными дефектными подпространствами \mathcal{M} , \mathcal{M}^* , и последующим расширением H_0^{ex} с выходом из \mathcal{H}^{ex} . Эта процедура требует детальной информации об элементах подпространств \mathcal{M} и \mathcal{M}^* с помощью которых, грубо говоря, и будет осуществляться взаимодействие внутреннего и внешнего каналов. С этой целью ниже мы подробно описываем структуру дефектных элементов оператора H_0^{ex} , заданного выражением (1) на множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ гладких

финитных в окрестности начала координат функций. Оператор H_0^{ex} симметричен с индексами дефекта $(\dim \mathfrak{M}, \dim \mathfrak{M}^*) = (1, 1)$, поскольку парциальные операторы, отвечающие орбитальным моментам $l \geq 1$, в существенном самосопряжены на области определения $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, и, таким образом, вклад в индексы дефекта не дают. Следовательно, для построения дефектных элементов оператора H_0^{ex} достаточно ограничиться s -волновым уравнением

$$(2) \quad (-d^2/dr^2 + ar^{-1})y = \lambda y.$$

Дефектный элемент $w \in \mathfrak{M}$, отвечающий точке λ , $\text{Im } \lambda \neq 0$, выражается через квадратично суммируемое с весом r^2 решение уравнения (2), $w = -r^{-1}y \in L^2(\mathbb{R}^3)$, и имеет вид [6]

$$(3) \quad w(r, k) = -2ik(4\pi)^{-1} \Gamma(1 + i\eta(k)) e^{ikr} \Psi(1 + i\eta(k), 2, -2ikr),$$

где $k = \sqrt{\lambda}$, $\text{Im } k > 0$, $\eta(k) = a/2k$ — кулоновский параметр, $\Psi(a, b, x)$ — иррегулярная вырожденная гипергеометрическая функция.

Дефектный элемент $w^* \in \mathfrak{M}^*$, отвечающий точке $\bar{\lambda}$, дается формулой (3) с заменой k на $-\bar{k}$ и равен $w(r, -\bar{k})$.

Представление (3) определяет асимптотику дефектного элемента w при $r \rightarrow 0$ [6]

$$(4) \quad w(r, k) = (4\pi r)^{-1} + a(4\pi)^{-1} \ln r + (4\pi)^{-1} g(a, k) + o(1),$$

где

$$(5) \quad g(a, k) = ik + [\ln(-2ik) + \psi(1 + i\eta(k)) + 2\gamma - 1]$$

— «спектральная» функция (ср. с [7]), $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, γ — постоянная Эйлера.

Введем понятие граничных значений, в терминах которых строится граничная форма оператора H_0^* , сопряженного к H_0^{ex} . Для этого воспользуемся теорией Неймана (см., например, [8]), согласно которой область определения любого самосопряженного расширения оператора H_0^{ex} получается добавлением к области определения замыкания исходного оператора $\mathcal{D}(\overline{H_0^{\text{ex}}}) = \dot{W}_2^2$ одномерного подпространства, натянутого на специальную линейную комбинацию дефектных элементов, отвечающих точкам λ и $\bar{\lambda}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$: $w_\Theta = w(r, k) + \Theta w(r, -\bar{k})$, $|\Theta| = 1$. Подсчет асимптотики функции w_Θ при $r \rightarrow 0$ приводит к выводу, что функции $u(r) = w_\Theta + \tilde{u}(r)$, $\tilde{u} \in \mathcal{D}(\overline{H_0^{\text{ex}}})$ из области определения самосопряженного расширения H_Λ оператора H_0^{ex} , отвечающие фиксированному Θ , ведут себя в окрестности $r = 0$ следующим образом:

$$(6) \quad u(r) = (4\pi)^{-1} [r^{-1} + a \ln r] \varepsilon_-^{\text{ex}} + \varepsilon_+^{\text{ex}} + o(1), \quad u \in \mathcal{D}(H_\Lambda),$$

$$(7) \quad \varepsilon_+^{\text{ex}}/\varepsilon_-^{\text{ex}} = \Lambda, \quad \Lambda \in \mathbb{R},$$

где Λ — новый параметр расширения, однозначно связанный с параметром Θ . Коэффициенты $\varepsilon_\pm^{\text{ex}}$ в асимптотике (6) будем называть граничными значениями элемента $u \in \mathcal{D}(H_\Lambda)$.

В терминах граничных значений легко вычислить граничную форму оператора H_0^* :

$$(8) \quad \{u, v\}^{\text{ex}} = \langle H_0^* u, v \rangle - \langle u, H_0^* v \rangle = \varepsilon_+^{\text{ex}}(u) \overline{\varepsilon_-^{\text{ex}}(v)} - \varepsilon_-^{\text{ex}}(u) \overline{\varepsilon_+^{\text{ex}}(v)},$$

которая пропорциональна билинейной форме тока вероятности. Для любого самосопряженного расширения H_Λ , отвечающего граничному условию (7), граничная форма (8) равна нулю: $\{\cdot, \cdot\}^{\text{ex}}=0$, т. е. выполнен закон сохранения вероятности.

Спектральная функция $g(a, k)$ содержит полную информацию о дискретном спектре семейства операторов H_Λ , $\Lambda \in \mathbb{R}$. Именно в силу (4) и (6) дискретный спектр операторов H_Λ совпадает с корнями уравнения

$$(9) \quad g(a, k) = 4\pi\Lambda.$$

Так, например, граничное условие $\varepsilon_-^{\text{ex}}=0$ ($\Lambda \rightarrow \infty$) приводит к обычному кулоновскому спектру, который в рассматриваемом случае совпадает с полюсами функции $g(a, \sqrt{z}) : z_n = -\kappa_n^2$, $\kappa_n = -a/2n$, $n=1, 2, \dots$

2. ВНУТРЕННИЙ КАНАЛ. СОВМЕСТНОЕ РАСШИРЕНИЕ

Мы моделируем внутреннюю структуру частиц подсоединением к внешнему каналу \mathcal{H}^{ex} дополнительного гильбертова пространства \mathcal{H}^{in} внутренних степеней свободы, динамика которых определяется некоторым самосопряженным оператором H^{in} . Произвол в выборе конкретного оператора H^{in} несуществен для построения модели, однако он позволяет моделировать различные физические ситуации.

Включение взаимодействия между каналами \mathcal{H}^{ex} и \mathcal{H}^{in} достигается сужением оператора H^{in} до симметричного оператора H_0^{in} с индексами дефекта (1, 1) и последующим расширением ортогональной суммы $H_0^{\text{ex}} \oplus H_0^{\text{in}}$ до самосопряженного оператора H , действующего в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\text{ex}} \oplus \mathcal{H}^{\text{in}}$.

Построение совместного самосопряженного расширения операторов H_0^{ex} и H_0^{in} сводится в нашей модели к требованию выполнения баланса токов вероятности внешнего и внутреннего каналов, где роль билинейных форм токов играют граничные формы соответствующих операторов. Граничная форма во внешнем канале определена равенством (8). Ее аналогом во внутреннем пространстве \mathcal{H}^{in} является [1] симплектическая форма

$$(10) \quad \{\eta, \nu\}^{\text{in}} = \varepsilon_-^{\text{in}}(\eta) \overline{\varepsilon_+^{\text{in}}(\nu)} - \varepsilon_+^{\text{in}}(\eta) \overline{\varepsilon_-^{\text{in}}(\nu)}, \quad \eta, \nu \in \mathcal{H}^{\text{in}},$$

в которой величины $\varepsilon_\pm^{\text{in}}$ играют роль граничных значений элементов из области определения оператора, сопряженного к H_0^{in} .

В терминах граничных форм (8) и (10) совместные самосопряженные расширения операторов H_0^{ex} , H_0^{in} выделяются с помощью такого линейного множества $\mathcal{L} \subset (\mathfrak{N} + \mathfrak{N}^*) \oplus (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}^*)$, где \mathfrak{N} и \mathfrak{N}^* — дефектные подпространства оператора H_0^{in} , на котором равна нулю суммарная граничная форма

$$(11) \quad \{U, V\} = \{u, v\}^{\text{ex}} + \{\eta, \nu\}^{\text{in}} = 0,$$

в которой $U = (u, \eta)$, $V = (v, \nu)$.

Равенства (11) можно добиться, задавая связь между $\varepsilon_\pm^{\text{ex}}$ и $\varepsilon_\pm^{\text{in}}$ следующими двумя способами:

$$(12.1) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_-^{\text{in}} \\ \varepsilon_+^{\text{ex}} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \varepsilon_+^{\text{in}} \\ \varepsilon_-^{\text{ex}} \end{pmatrix},$$

$$(12.2) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_-^{\text{in}} \\ -\varepsilon_-^{\text{ex}} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \varepsilon_+^{\text{in}} \\ \varepsilon_+^{\text{ex}} \end{pmatrix},$$

здесь B — эрмитова 2×2 -матрица, являющаяся параметром расширения.

В действительности все самосопряженные расширения входят в одно из семейств (12.1) или (12.2) с точностью до обращения матрицы B . Однако выбор конкретного расширения диктуется физикой задачи. Так, например, экспериментально наблюдаемый эффект «углубления» уровней атомного спектра адронных атомов, обусловленный нетривиальной внутренней структурой адронов, воспроизводится, как будет показано ниже, в схеме расширений (12.1). Поэтому далее мы подробно изучим расширение H_α оператора $H_0^{\text{ex}} \oplus H_0^{\text{in}}$ типа (12.1), определяемое связью

$$(13) \quad \varepsilon_-^{\text{ex}} = \bar{\beta}^{-1} \varepsilon_-^{\text{in}}, \quad \varepsilon_+^{\text{ex}} = \beta \varepsilon_+^{\text{in}},$$

которая соответствует матрице $B = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\beta} \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Параметр расширения

$\alpha = 1/|\beta|^2$ играет роль константы связи внешнего и внутреннего каналов: при $\alpha \rightarrow 0$ полный гамильтониан H_α во внешнем канале переходит в кулоновский оператор Шредингера, отвечающий регулярному граничному условию $\varepsilon_-^{\text{ex}} = 0$, а во внутреннем канале — в исходный оператор H^{in} .

Изучение свойств волновых функций дискретного и непрерывного спектров оператора H_α сводится к решению уравнения

$$(14) \quad H_\alpha U = k^2 U, \quad U = (u, \eta),$$

где u и η — компоненты полной волновой функции U во внешнем и внутреннем каналах, соответственно.

На решениях уравнения (14) граничные значения $\varepsilon_\pm^{\text{in}}(U)$ волновой функции во внутреннем подпространстве связаны независимо от конкретной схемы расширения линейным соотношением [1]

$$(15) \quad \varepsilon_-^{\text{in}}(U) = \Delta(k^2) \varepsilon_+^{\text{in}}(U),$$

в котором зависящая от энергии функция $\Delta(k^2)$ — интеграл Шварца спектральной меры $d\langle E_\lambda \varphi, \varphi \rangle$ оператора H^{in} , отвечающей порождающему элементу $\varphi \in \mathcal{H}^{\text{in}}$,

$$(16) \quad \Delta(z) = \langle (I + zH^{\text{in}})(H^{\text{in}} - zI)^{-1} \varphi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \lambda z}{\lambda - z} d\langle E_\lambda \varphi, \varphi \rangle.$$

Функция $\Delta(z)$ согласно (16) содержит полную информацию о спектральных свойствах внутреннего гамильтониана H^{in} и, как показано в [3], с точностью до умножения на константу связи α совпадает с P -матрицей Джаффе — Лоу.

Исключим теперь переменные внутреннего канала, воспользовавшись (15). Тогда для внешней компоненты u полной волновой функции U получим краевую задачу

$$(17) \quad \begin{aligned} (-\Delta + ar^{-1})u &= k^2 u, \\ \varepsilon_+^{\text{ex}}/\varepsilon_-^{\text{ex}} &= \Lambda(k^2) = [\alpha \Delta(k^2)]^{-1} \end{aligned}$$

с граничным условием (17), зависящим от энергии.

Способ наложения конфайнмента во внутреннем канале сводится в нашей модели к выбору внутреннего оператора H^{in} с чисто дискретным спектром: $H^{in} = \sum_s \lambda_s \mathcal{P}_s$, где \mathcal{P}_s — одномерные собственные проекторы оператора H^{in} , отвечающие собственным значениям λ_s . При низких и промежуточных энергиях в качестве оператора H^{in} вполне допустимо рассматривать и конечномерный оператор. Действительно, характерные энергии кварковых уровней порядка 10^3 МэВ, и, таким образом, в интервале энергий от 0 до нескольких ГэВ существенный вклад могут вносить лишь несколько таких уровней. В рассматриваемом случае функция $\Delta(k^2)$ согласно (16) сводится к хорошо известному полюсному приближению для P -матрицы

$$(18) \quad \Delta(k^2) = \sum_s \frac{1+k^2\lambda_s}{\lambda_s-k^2} \langle \mathcal{P}_s \Phi, \Phi \rangle.$$

В ситуации общего положения функция $\Delta(k^2)$ из (18) может содержать линейно зависящее от энергии слагаемое, связанное, как показано в [3], с конфайнментом сколь угодно высоковозбужденных состояний внутреннего канала.

3. ПЕРЕСТРОЙКА АТОМНОГО СПЕКТРА

Связь внутреннего и внешнего каналов проявляется, в частности, во взаимном влиянии спектров исходных гамильтонианов. Это влияние можно проследить, изучая спектр полного гамильтониана H_α . В настоящем разделе мы вычисляем сдвиги кулоновских уровней, обусловленные наличием внутренней структуры частиц, и, в частности, демонстрируем возможность перестройки атомного спектра [4].

Дискретный спектр оператора H_α совпадает с корнями уравнения (9), в котором правая часть определяется функцией $\Lambda(k^2)$ из соотношения (17); при этом следует отбирать лишь те корни, для которых внешняя компонента является квадратично-суммируемой в \mathbb{R}^3 функцией. Это уравнение с учетом (17) можно переписать в виде

$$(19) \quad \alpha \Delta(k^2) = 4\pi \{g(a, k)\}^{-1}.$$

Проследим за сдвигом кулоновских уровней в первом порядке по малому параметру α в предположении, что кулоновский спектр $z_n = -a^2/4n^2$, $n=1, 2, \dots$, и спектр внутреннего гамильтониана $\{\lambda_s\}$, $s=1, 2, \dots$, «хорошо разделены»:

$$(20) \quad |z_n| \ll |\lambda_s|, \quad \forall n, s.$$

Отметим, что для адронных атомов типа K^-p , p, \bar{p} предположение о разделении спектров является естественным.

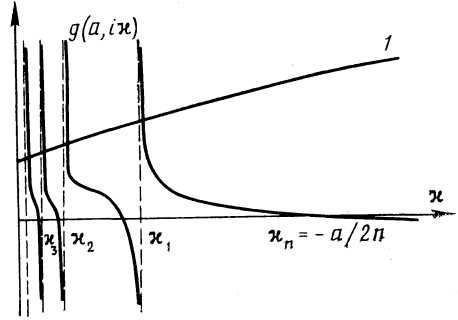
Обозначим возмущенное собственное число через $z_n' = -(\kappa_n + \delta_n)^2$, где δ_n — искомый сдвиг n -го кулоновского уровня $z_n = -\kappa_n^2 = -a^2/4n^2$. Используя асимптотическое представление функции $g(a, \sqrt{z})$ в окрестности полюса

$$4\pi \{g(a, i(\kappa_n + \delta_n))\}^{-1} \sim 4\pi a \left\{ \psi \left(\frac{a}{2(\kappa_n + \delta_n)} \right) \right\}^{-1} \sim 8\pi n^2 a^{-2} \delta_n,$$

а также предположение о разделении спектров, получим явное выражение для сдвига δ_n : $\delta_n \sim (a^2/8\pi n^2)\alpha\Delta(z_n)$, или окончательно

$$(24) \quad \Delta z_n = z_n' - z_n \sim \frac{a^3}{8\pi n^3} \alpha \Delta\left(-\frac{a^2}{4n^2}\right).$$

Выражение (18) для функции g вместе с соотношением (24) приводит к следующей качественной картине. В случае, если внутренний оператор имеет только положительный спектр $\lambda_s > 0$, то при условии $|\lambda_s z_n| < 1$ сдвиг кулоновских уровней происходит в сторону углубления, $\Delta z_n < 0$. Напротив, если внутренний оператор имеет лишь отрицательный спектр, то независимо от соотношения между λ_s и z_n имеет место обратный сдвиг $\Delta z_n > 0$. Следует отметить, что при включении связи между каналами отрицательные собственные числа внутреннего оператора также испытывают сдвиг, превращаясь в собственные числа полного гамильтониана.



Эволюция кулоновского спектра по константе α связи каналов может быть прослежена вне рамок теории возмущений. Качественный анализ можно провести, решая уравнение (19) для конкретной величины заряда a и при фиксированном выборе функции $\Delta(z)$. Характерное поведение функции $g(a, i\kappa)$ изображено на рисунке (кривая 1 — график функции $4\pi[\alpha\Delta(-\kappa^2)]^{-1}$). Спектр полного гамильтониана H_α определяется точками пересечения графика функции $g(a, i\kappa)$ с кривой 1. Легко видеть, что увеличение константы связи α углубляет кулоновские уровни. Детальный анализ рисунка приводит к следующим выводам: 1) в схеме расширений (13) при условиях $|\lambda_s z_n| < 1$, $|\lambda_s| \gg |z_n|$ наблюдается явление квазиперестройки атомного спектра в следующем смысле: 1S-уровень при увеличении константы связи α переходит в более глубокое состояние, 2S-уровень стремится к нулю функции $g(a, i\kappa)$, ближайшему к основному состоянию и т.д.; 2) точность перестройки атомного спектра определяется близостью нулей и полюсов функции g и в конечном счете величиной эффективного заряда a ; 3) явление полной перестройки может быть получено в ситуации общего положения, т.е. в случае произвольной эрмитовой матрицы B связи каналов.

4. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ. РЕЗОНАНСЫ

Информацию о возмущении непрерывного спектра внешнего канала дискретным спектром внутреннего канала несет полная S -матрица. Мы изучим аналитические свойства блока S^{ex} полной матрицы рассеяния S , отвечающего внешнему каналу, и покажем, что особенности функции S^{ex} на втором листе римановой поверхности энергии совпадают с резонансами, порожденными внутренней структурой частиц.

Рассмотрим решение уравнения

$$(22) \quad (H_0^{\text{ex}})*u = k^2 u$$

такое, что $u(r, k) = r^{-1} \{f^-(r, k) - S^{\text{ex}}(k)f^+(r, k)\}$, здесь f^\pm — решения Йоста, нормированные условием

$$f^\pm(r, k) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \exp\{\pm ikr \mp i\eta(k) \ln 2kr\}, \quad k \in \mathbb{R},$$

а $S^{\text{ex}}(k)$ — искомая S -матрица внешнего канала. Для нахождения функции $S^{\text{ex}}(k)$ подсчитаем граничные значения $\varepsilon_\pm^{\text{ex}}(u)$ решения u

$$\begin{aligned} \varepsilon_-^{\text{ex}}(u) &= 4\pi \{M_-(k) - S^{\text{ex}}(k)M_+(k)\}, \\ \varepsilon_+^{\text{ex}}(u) &= M_-(k)g(a, -k) - S^{\text{ex}}(k)M_+(k)g(a, k), \end{aligned}$$

выраженные в терминах функций Йоста

$$M_\pm(k) = f^\pm(0, k) = \exp(i/2\pi\eta(k)) \{\Gamma(1 \pm i\eta(k))\}^{-1}.$$

Отсюда, используя граничное условие $\varepsilon_+^{\text{ex}}/\varepsilon_-^{\text{ex}} = \Lambda(k^2)$ и явное представление для функции $\Lambda(k^2)$, отвечающее расширению (13), приходим к следующему выражению для функции $S^{\text{ex}}(k)$:

$$\begin{aligned} (23) \quad S^{\text{ex}}(k) &= \frac{M_-(k)}{M_+(k)} \frac{g(a, -k) - 4\pi\Lambda(k^2)}{g(a, k) - 4\pi\Lambda(k^2)} = \\ &= \frac{\Gamma(1 + i\eta(k))}{\Gamma(1 - i\eta(k))} \frac{g(a, -k) - 4\pi[\alpha\Delta(k^2)]^{-1}}{g(a, k) - 4\pi[\alpha\Delta(k^2)]^{-1}} = S^c \cdot \tilde{S}. \end{aligned}$$

Из (23) видим, что при выключении связи между каналами (в пределе $\alpha \rightarrow 0$) S -матрица внешнего канала стремится к чисто кулоновской матрице рассеяния $S^c = M_-(k)/M_+(k)$.

Определенная соотношением (23) S -матрица имеет особенности в нижней полуплоскости $\text{Im } k < 0$, совпадающие с решениями уравнения (19). Эти особенности «происходят» из положительных собственных чисел λ_s внутреннего гамильтониана H^{in} , испытывающих сдвиги в нижнюю полуплоскость $\text{Im } k < 0$ при включении связи между каналами. Эти сдвиги легко подсчитать по теории возмущений. В первом порядке по константе связи α будем иметь

$$(24) \quad \Delta k_s = k_s' - k_s \sim \alpha \frac{(1 + k_s'^4)}{8\pi} \langle \mathcal{P}_s \varphi, \varphi \rangle k_s^{-1} g(a, k_s),$$

где $k_s'^2 = \lambda_s > 0$. Направление сдвига определяется знаком мнимой части множителя $k_s^{-1} g(a, k_s)$. Из определения (5) спектральной функции легко видеть, что при $\lambda_s > 0$ справедливо равенство

$$(25) \quad k_s^{-1} g(a, k_s) = -i + a k_s^{-1} \psi(-ia/2k_s) + k_s^{-1} a (2\gamma - 1 + \ln |2k_s|).$$

Пользуясь (25) и представлением гамма-функции в виде бесконечного произведения, находим

$$\text{Im}(k_s^{-1} g(a, k_s)) = -3 - \frac{a^2}{2k_s^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + a^2/4k_s^2)^{-1} < 0.$$

В силу (24) это неравенство означает, что $\text{Im } \Delta k_s < 0$, т. е. сдвиг собствен-

ного числа k_s действительно происходит на нефизический лист ($\text{Im } k < 0$). При этом решение k_s' уравнения (19) проявляется там как резонанс, порожденный внутренней структурой сталкивающихся частиц.

Авторы признательны Б. О. Кербикову, привлечшему внимание к рассматриваемой тематике, и Б. С. Павлову за полезные обсуждения.

Литература

- [1] Павлов Б. С. // ТМФ. 1984. Т. 59. № 3. С. 345–353.
- [2] Куперин Ю. А., Макаров К. А., Павлов Б. С. // ТМФ. 1985. Т. 63. № 1. С. 78–87.
- [3] Куперин Ю. А., Макаров К. А., Павлов Б. С. // ТМФ. 1986. Т. 69. № 1. С. 100–114.
- [4] Кербиков Б. О. // ЯФ. 1985. Т. 41. С. 725–731.
- [5] Кербиков Б. О. // ТМФ. 1985. Т. 65. № 3. С. 379–390.
- [6] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, ч. 1. М.: Наука, 1965.
- [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. С. 655–659.
- [8] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: ЛГУ, 1980.

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
26.V.1986.

COULOMB TWO-BODY PROBLEM WITH INTERNAL STRUCTURE

Kuperin Yu. A., Makarov K. A., Melnikov Yu. B.

Using the theory of extensions with the transition into the enlarged Hilbert space, the model of two-body problem is constructed which describes the interaction of the external (Coulomb) and internal (quark) channels. The reciprocal influence of channel Hamiltonians is studied which leads, in particular, to a rearrangement of spectra of hadronic atoms. An explicit representation for the S -matrix is obtained and its singularities on the energy shell are analysed.